Cours de Formation par la Recherche, ENSAE-CREST. Leçon 5 : Modèles multivariés

Gilles Teyssière
stats@gillesteyssiere.net

Mars–Avril 2007

Processus vectoriels LARCH(∞) I

Définition

Le processus LARCH(∞) est défini comme la solution stationnaire des équations récurrentes :

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} \right)$$

- $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de matrices aléatoires iid à valeurs réelles de dimension* $d \times m$,
- $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de matrices à valeurs réelles de dimension* $m \times d$,
- a *est un vecteur de dimension* m.

Processus vectoriels LARCH(∞) I

Définition

Le processus LARCH(∞) est défini comme la solution stationnaire des équations récurrentes :

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} \right)$$

- $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de matrices aléatoires iid à valeurs réelles de dimension* $d \times m$,
- $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de matrices à valeurs réelles de dimension* $m \times d$,
- a *est un vecteur de dimension* m.

Remarque

Si les a, $\{a_j\}$, $\{\xi_t\}$, *sont des scalaires, nous retrouvons le processus LARCH(∞) introduit dans la leçon 1.*

Processus vectoriels LARCH(∞) II

Ce processus généralise plusieurs autres processus bien connus :

Le modèle bilinéaire avec :

$$X_t = \zeta_t \left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t-j} \right) + \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j X_{t-j},$$

toutes les variables sont ici des scalaires, et ζ_t sont les innovations. Fixons :

$$\xi_t = (\zeta_t, 1), \quad a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}.$$

Processus vectoriels LARCH(∞) II

Ce processus généralise plusieurs autres processus bien connus :

Le modèle bilinéaire avec :

$$X_t = \zeta_t \left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t-j} \right) + \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j X_{t-j},$$

toutes les variables sont ici des scalaires, et ζ_t sont les innovations. Fixons :

$$\xi_t = (\zeta_t, 1), \quad a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'expansion

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_k \geqslant 1} a_{j_1} \ldots a_{j_k} \xi_{t-j_1-\cdots-j_k} a \right)$$

est la même que celle utilisée par Giraitis et Surgailis (2001).

Processus vectoriels LARCH(∞) III

Le modèle GARCH(p, q) avec :

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \gamma_0 + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j r_{t-j}^2 \quad \gamma_0 > 0, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \end{aligned}$$

les ε étant centrés.

Processus vectoriels LARCH(∞) III

Le modèle GARCH(p,q) avec :

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \gamma_0 + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j r_{t-j}^2 \quad \gamma_0 > 0, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \end{aligned}$$

les ε étant centrés.

- Ce modèle peut être considéré comme un cas particulier de la classe des modèles bilinéaires (voir Giraitis *et al.*, 2005) :

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_0}{1 - \sum \beta_i}, \quad \sum \alpha_i z^i = \frac{\sum \gamma_i z^i}{1 - \sum \beta_i z^i}$$

- La fonction de covariance de la suite des $\{r_t^2\}$ décroit exponentiellement, (décroissance exponentielle des α_j)

Processus vectoriels LARCH(∞) IV

Le modèle ARCH(∞) avec :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_{t-j}^2,$$

$$X_t = r_t^2, \quad \xi_t = \left(\frac{\varepsilon_t^2 - \lambda_1}{\kappa}, 1 \right), \quad a = \begin{pmatrix} \kappa \beta_0 \\ \lambda_1 \beta_0 \end{pmatrix}, \quad a_j = \begin{pmatrix} \kappa \beta_j \\ \lambda_1 \beta_j \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = E(\varepsilon_0^2)$, et $\kappa^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_0^2)$.

- Conditions pour l'existence d'une solution stationnaire pour le modèle ARCH(∞) univarié on été démontrées par Giraitis, Kokoszka et Leipus (2000), et Giraitis et Surgailis (2001), à l'aide d'expansions de Volterra (développement chaotique),
- On considère ici une généralisation multidimensionnelle de ces résultats.

Processus vectoriels LARCH(∞) V

Modèles multivariés

Modèle avec plusieurs variables et innovations :

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \zeta_{1,t}\left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^1 Z_{t-j}\right) + \mu_{1,t}\left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^1 Y_{t-j}\right) + \gamma + \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j^1 Z_{t-j} \\
Y_t &= \zeta_{2,t}\left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2 Y_{t-j}\right) + \mu_{2,t}\left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^2 Z_{t-j}\right) + \gamma + \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j^2 Y_{t-j}
\end{aligned}
$$

Processus vectoriels LARCH(∞) V

Modèles multivariés

Modèle avec plusieurs variables et innovations :

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \zeta_{1,t}\left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^1 Z_{t-j}\right) + \mu_{1,t}\left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^1 Y_{t-j}\right) + \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^1 Z_{t-j} \\
Y_t &= \zeta_{2,t}\left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 Y_{t-j}\right) + \mu_{2,t}\left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 Z_{t-j}\right) + \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^2 Y_{t-j}
\end{aligned}
$$

Ceci peut se réecrire comme un modèle LARCH(∞) vectoriel avec $d = 2$ et $m = 3$,

$\xi_t = \begin{pmatrix} \zeta_{1,t} & \mu_{1,t} & 1 \\ \zeta_{2,t} & \mu_{2,t} & 1 \end{pmatrix}$: suite iid (2×3), $a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^1 & \alpha_j^2 \\ \beta_j^1 & \beta_j^2 \\ \gamma_j^1 & \gamma_j^2 \end{pmatrix}$: matrice (3×2)

$a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$: vecteur de $\mathbb{R}^3$, $X_t = \begin{pmatrix} Z_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ processus vectoriel de dimension 2.

Processus vectoriels LARCH(∞) VI

Modèles GARCH multivariés

Définis dans le cas p-dimensionnel comme :

$$R_t = \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t,$$

- R_t est un vecteur de dimension p,
- Σ_t est une matrice $(p \times p)$ définie positive,
- ε_t vecteur p–dimensionnel.

Remarques

- La dépendance commune à longue portée peut être modélisée avec l'hypothèse que les innovations $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ sont corrélées.

Processus vectoriels LARCH(∞) VI

Modèles GARCH multivariés

Définis dans le cas p-dimensionnel comme :

$$R_t = \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t,$$

- R_t est un vecteur de dimension p,
- Σ_t est une matrice $(p \times p)$ définie positive,
- ε_t vecteur p–dimensionnel.

Remarques

- La dépendance commune à longue portée peut être modélisée avec l'hypothèse que les innovations $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ sont corrélées.
- Cas intéressant : le modèle bivarié (X_t, Y_t) avec l'hypothèse que les $(\zeta_{1,t}, \zeta_{2,t})$ sont corréllées de façon croisée.

Existence et unicité d'une solution dans L^p I

Soit $A(x) = \sum_{j \geqslant x} \|a_j\|$, $A = A(1)$, où $\| \cdot \|$ est la norme matricielle.

Théorème

Soit $p > 0$, notons

$$\varphi = \sum_{j \geqslant 1} \|a_j\|^{p \wedge 1} \left(E\|\xi_0\|^p\right)^{\frac{1}{p \wedge 1}} . \qquad D0$$

Si $\varphi < 1$, alors une solution stationnaire dans L^p de l'équation définissant un LARCH(∞) est donnée par :

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_k \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k} \xi_{t-j_1-\cdots-j_k} a \right) . \qquad D1$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p II

Démonstration

On veut montrer que l'expression (D1) converge dans L^p et est solution de l'équation définissant un LARCH(∞) vectoriel.

- *Étape 1 Nous montrons d'abord que l'expression (D1) est bien définie. Pour $p \geqslant 1$, nous avons*

$$\sum_{j_1,\dots,j_k\geqslant 1} \|a_{j_1}\xi_{t-j_1}\cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\cdots-j_k}\|_{m\times m}$$

$$\leqslant \sum_{j_1,\dots,j_k\geqslant 1} \|a_{j_1}\|_{m\times d}\cdots\|a_{j_k}\|_{m\times d}\|\xi_{t-j_1}\|_{d\times m}\cdots\|\xi_{t-j_1-\cdots-j_k}\|_{d\times m}$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p III

Démonstration (suite)

Cette suite converge donc en norme L^p car :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_k \geqslant 1} & \left(E\|a_{j_1}\xi_{t-j_1}\cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\dots-j_k}\|^p\right)^{1/p} \\
& \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_k \geqslant 1} \|a_{j_1}\|\cdots\|a_{j_k}\|(E\|\xi_{t-j_1}\|^p)^{1/p}\cdots(E\|\xi_{t-j_1-\dots-j_k}\|^p)^{1/p} \\
& \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_k \geqslant 1} \|a_{j_1}\|\cdots\|a_{j_k}\|\,(E\|\xi_0\|^p)^{\frac{k}{p}} \\
& \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k
\end{aligned}
$$

La suite $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k$ est finie puisque $\varphi < 1$, donc la suite (D1) converge en norme L^p.

Existence et unicité d'une solution dans L^p IV

Démonstration (suite)

- Étape 2 Nous montrons que l'expression (D1) est solution de l'équation qui définit le processus LARCH(∞).

$$X_t = \xi_t \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots j_k \geqslant 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\cdots-j_k} \right) a$$

$$= \xi_t \Bigg(a + \sum_{j_1 \geqslant 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j_1 \geqslant 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1} \sum_{j_2,\ldots,j_k \geqslant 1} a_{j_2}\xi_{t-j_1-j_2} \cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-j_2-\cdots-j_k} a \Bigg)$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p V

Démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
X_t &= \xi_t \left(a + \sum_{j_1 \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \Bigg(a + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j_2,\ldots,j_k \geqslant 1} a_{j_2} \xi_{(t-j_1)-j_2} \cdots a_{j_k} \xi_{(t-j_1)-j_2-\cdots-j_k} a \Bigg) \right) \\
&= \xi_t \left(a + \sum_{j \geqslant 1} a_j X_{t-j} \right).
\end{aligned}
$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p V

Démonstration (suite)

$$\begin{aligned} X_t &= \xi_t \Bigg(a + \sum_{j_1 \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \Big(a + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j_2,\ldots,j_k \geqslant 1} a_{j_2} \xi_{(t-j_1)-j_2} \cdots a_{j_k} \xi_{(t-j_1)-j_2-\cdots-j_k} a \Big) \Bigg) \\ &= \xi_t \Bigg(a + \sum_{j \geqslant 1} a_j X_{t-j} \Bigg) . \end{aligned}$$

L'unicité de cette solution ne peut être obtenue sans hypothèses supplémentaires (voir théorème suivant).

Existence et unicité d'une solution dans L^p VI

Théorème

- *Supposons que* $p \geqslant 1$ *alors à partir de (D0)* $\varphi = \sum_j \|a_j\| \|\xi_0\|_p$.
- *Supposons* $\varphi < 1$.
- *Si une solution stationnaire* $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ *de l'équation définissant le processus vectoriel ARCH(*∞*) existe (p.s.), si* Y_t *est independant de la sigma-algèbre engendrée par* $\{\xi_s; s > t\}$, *pour chaque* $t \in \mathbb{Z}$, *alors cette solution est aussi dans* L^p *et elle est (p.s.) égale à la solution précédente* $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ *définie per l'équation (D1).*

Existence et unicité d'une solution dans L^p VII

Démonstration

- *Étape 1 On commence par démontrer que $\|Y_0\|_p < \infty$.*
- *À partir de l'équation qui définit le processus LARCH(∞) vectoriel et la stationnarité de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$'s nous obtenons*

$$\|Y_0\|_p \leqslant \|\xi_0\|_p \left(\|a\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \|Y_0\|_p \right) < \infty,$$

- *le premier point du théorème est dérivé de :*

$$\|Y_0\|_p \leqslant \frac{\|\xi_0\|_p \|a\|}{1-\varphi} < \infty.$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p VIII

Démonstration (suite)

- Étape 2

  On écrit récursivement : $Y_t = \xi_t \left(a + \sum_{j \geqslant 1} a_j Y_{t-j} \right) = X_t^m + S_t^m$, avec

$$\begin{aligned} X_t^m &= \xi_t \left(a + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j_1, \cdots, j_k \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k} \xi_{t-j_1 \cdots - j_k} a \right), \\ S_t^m &= \xi_t \left(\sum_{j_1, \cdots, j_{m+1} \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_m} \xi_{t-j_1 \cdots - j_m} a_{j_m+1} Y_{t-j_1 \cdots - j_m} \right). \end{aligned}$$

  Nous avons

$$\|S_t^m\|_p \leqslant \|\xi\|_p \sum_{j_1, \cdots, j_{m+1} \geqslant 1} \|a_{j_1}\| \cdots \|a_{j_{m+1}}\| \|\xi\|_p^m \|Y_0\|_p = \|Y_0\|_p \varphi^{m+1}.$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p IX

Démonstration

Nous réécrivons le développement chaotique de X_t, équation (D1), comme un dévelopement fini plus un terme négligeable qui peut être contrôlé. $X_t = X_t^m + R_t^m$ *avec*

$$R_t^m = \xi_t \left(\sum_{k>m} \sum_{j_1,\cdots,j_k \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k} \xi_{t-j_1\cdots-j_k} a \right),$$

vérifie :

$$\|R_t^m\|_p \leqslant \|a\| \|\xi_0\|_p \sum_{k>m} \varphi^k \leqslant \|a\| \|\xi_0\|_p \frac{\varphi^m}{1-\varphi} \to 0.$$

Existence et unicité d'une solution dans L^p IX

Démonstration

Nous réécrivons le développement chaotique de X_t, équation (D1), comme un dévelopement fini plus un terme négligeable qui peut être contrôlé. $X_t = X_t^m + R_t^m$ *avec*

$$R_t^m = \xi_t \left(\sum_{k>m} \sum_{j_1,\cdots,j_k \geqslant 1} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k} \xi_{t-j_1 \cdots - j_k} a \right),$$

vérifie :

$$\|R_t^m\|_p \leqslant \|a\| \|\xi_0\|_p \sum_{k>m} \varphi^k \leqslant \|a\| \|\xi_0\|_p \frac{\varphi^m}{1-\varphi} \to 0.$$

Remarque

Cette méthode a été utilisée par Giraitis, Kokoszka, Leipus (2000).

Existence et unicité d'une solution dans L^p X

Démonstration

La différence entre ces deux solutions est contrôlée par m avec $X_t - Y_t = R_t^m - S_t^m$, *d'où*

$$\begin{aligned} \|X_t - Y_t\|_p &\leqslant \|R_t^m\|_p + \|S_t^m\|_p \\ &\leqslant \frac{\varphi^m}{1-\varphi}\|a\|\|\xi_0\|_p + \|Y_0\|_p\varphi^m \\ &\leqslant 2\frac{\varphi^m}{1-\varphi}\|a\|\|\xi_0\|_p \end{aligned}$$

donc, $Y_t = X_t$ *p.s.*

Existence et unicité d'une solution dans L^p XI

Lemme

- Supposons a_j matrices $(m \times d)$ définies pour tout $j \in \mathbb{Z}^D \setminus \{0\}$.
- Fixons une norme arbitraire $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{Z}^D$.
- Étendons la fonction A définie auparavant à $A(x) = \sum_{\|j\| \geqslant x} \|a_j\|$, $A = A(1)$ nous supposons avec $p = \infty$ que $\varphi = A\|\xi_0\|_\infty < 1$.
- Alors le champ aléatoire

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1 \neq 0} \cdots \sum_{j_k \neq 0} a_{j_1} \xi_{t-j_1} \cdots a_{j_k} \xi_{t-j_1-\cdots-j_k} a \right)$$

est une solution de l'équation récurrente :

$$X_t = \xi_t \left(a + \sum_{j \neq 0} a_j X_{t-j} \right), \quad t \in \mathbb{Z}^D.$$

Chaque solution stationnaire de cette équation est aussi bornée et est égale à X_t, p.s.

Existence et unicité d'une solution dans L^p XII

Remarques

- Dans ce lemme, l'indépendance des ξ n'intervient pas. On a besoin de $\|\xi_t\|_\infty \leqslant M$ pour chaque $t \in \mathbb{Z}^D$.
- La contrainte sur les innovations exclut de représenter des phénomènes tels que les bulles explosives, krach boursiers, etc.

Existence et unicité d'une solution dans L^2 I

Nous étudions ici l'extension dans le cas multivarié des résultats de Giraitis *et al.* (2000).

Théorème

Supposons que la suite iid $\{\xi_t\}$ vérifie $E(\xi_k) = 0$.

Supposons que la matrice $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' E(\xi_k' \xi_k) a_k$ a un rayon spectral qui vérifie $\rho(S) < 1$.

Alors, il existe une solution stationnaire dans L^2 de l'équation définissant un ARCH(∞) donné par (D1).

De plus, cette solution dans L^2 est unique.

Remarque

- *L'hypothèse $\rho(S) < 1$ implique $\xi_t \in L^2$ pour $t \in \mathbb{Z}$.*

Existence et unicité d'une solution dans L^2 II

Démonstration

- *Étape 1 : Existence Définissons $T = E(\xi_k' \xi_k)$. Considerons le développement chaotique (D1) et fixons*

$$C_t(k_2, \dots, k_\ell) = \xi_t a_{k_2} \xi_{t-k_2} \cdots a_{k_\ell} \xi_{t-k_2 \cdots - k_\ell} a$$

nous écrivons $E(X_t' X_t) = a' E \xi_t' \xi_t a + B = a' T a + B$ où

Existence et unicité d'une solution dans L^2 III

Démonstration (suite)

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{\ell,k_1,\dots,k_\ell \geqslant 1} EC'_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell)a'_{k_1}Ta_{k_1}C_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&= \sum_{\ell,k_1,\dots,k_\ell} EC'_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell)a'_{k_1}E\xi'_{t-k_1}\xi_{t-k_1}a_{k_1}C_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&= \sum_{\ell,k_1,\dots,k_\ell} EC'_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell)\left(Ea'_{k_1}\xi'_{t-k_1}\xi_{t-k_1}a_{k_1}\right)C_{t-k_1}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&= \sum_{\ell,k_1,\dots,k_\ell} EC'_{t}(k_2,\dots,k_\ell)\left(Ea'_{k_1}\xi'_{t-k_1}\xi_{t-k_1}a_{k_1}\right)C_{t}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&= \sum_{\ell,k_2,\dots,k_\ell} EC'_{t}(k_2,\dots,k_\ell)SC_{t}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&\leqslant \rho(S)\sum_{\ell,k_2,\dots,k_\ell} EC'_{t}(k_2,\dots,k_\ell)C_{t}(k_2,\dots,k_\ell) \\
&\leqslant E(\xi_0 a)'(\xi_0 a)\sum_{\ell=1}^{\infty}\rho(S)^\ell \qquad \text{(récursivement)} \\
&\leqslant a'a\rho(T)\sum_{\ell=1}^{\infty}\rho(S)^\ell,
\end{aligned}$$

Donc,

$$E(X'_tX_t) \leqslant a'Ta + a'a\frac{\rho(T)}{1-\rho(S)} < \infty \qquad D2$$

Existence et unicité d'une solution dans L^2 IV

Démonstration

- *Étape 2 : Unicité Soient X_t^1 et X_t^2 deux solutions de l'équation définissant un LARCH(∞) dans L^2. Définissons $\tilde{X}_t = X_t^1 - X_t^2$, alors $\tilde{X}_t$ est solution de*

$$\tilde{X}_t = \xi_t \tilde{A}_t, \quad \tilde{A}_t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{X}_{t-k}. \tag{D3}$$

Nous utilisons (D3) et le fait que $\tilde{X}_t$ est centré et donc $E\tilde{X}_s\tilde{X}_t = 0$ pour $s \neq t$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
E\left((\tilde{X}_t g)'(\tilde{X}_t g)\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} g' E\left(\tilde{X}_{t-k}' a_{t-k}' T a_{t-k} \tilde{X}_{t-k}\right) g \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} g' E\left(\tilde{X}_t' a_{t-k}' T a_{t-k} \tilde{X}_t\right) g \\
&= g' E\left(\tilde{X}_t' S \tilde{X}_t\right) g \\
&= E\left((\tilde{X}_t g)' S (\tilde{X}_t g)\right) \\
&\leqslant \rho(S) E\left((\tilde{X}_t g)'(\tilde{X}_t g)\right)
\end{aligned}$$

D'aprés (D2), cette expression est finie et l'hypothèse $\rho(S) < 1$ conclut la preuve.

Références

Bulinski, A., Shashkin, A. (2007). *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems*. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, Vol. 10, World Scientific Publishing.

Doukhan, P., Teyssière, G., Winant, P., A LARCH(∞) vector valued process, dans *Dependence in Probability and Statistics*. Lecture Notes in Statistics **187**, P. Bertail, P. Doukhan et Ph. Soulier éditeurs, Springer, New York, 2006, pp. 245–258.

Giraitis, L., Kokoszka, P.S., Leipus, R. (2000). Stationary ARCH Models: Dependence Structure and Central Limit Theorem. *Econometric Theory*, **16** , 3–22.

Giraitis, L., Koul, H., Surgailis, D. (2010). *Large Sample Inference for Long–Memory Processes*, Imperial College Press, à paraître.

Teyssière, G. (1997). Modelling exchange rates volatility with multivariate long-memory ARCH processes. *Prépublication*.

Teyssière, G. (1998). Multivariate long-memory ARCH modelling for high frequency foreign exchange rates. *Proceedings of the Second High Frequency Data in Finance (HFDF-II) Conference, Olsen & Associates, April 1998.*