

# Cours de Formation par la Recherche, ENSAE-CREST. Leçon 1 : Processus fortement dépendants

Gilles Teyssière  
stats@gillesteysiere.net

Mars–Avril 2007

# Introduction : un exemple empirique d'un indice boursier

Considérons la série chronologique de l'indice boursier FTSE 100 (le "Footsie") :

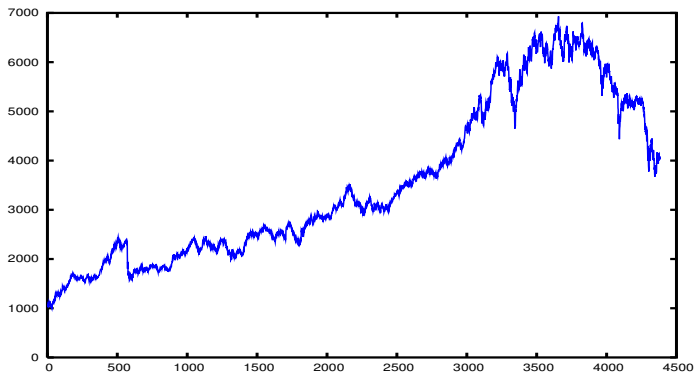
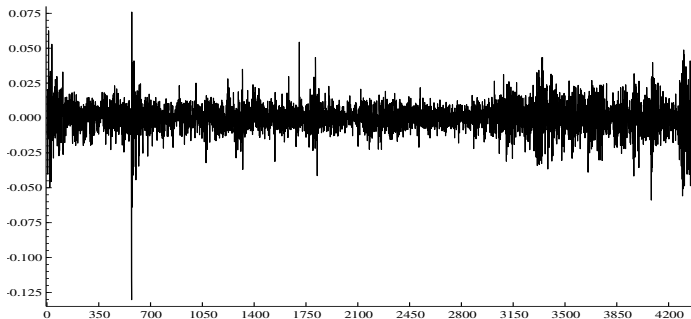


Figure: Indice FTSE 100 (1986–2002)

# Exemple empirique : Log des rendements $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$ sur l'indice FTSE 100 (1986–2002)



## Remarque

*Processus "intermittents" : les périodes de grandes variations sont suivies de périodes de faibles variations (Mandelbrot, 1963).*

# Exemple empirique : la valeur absolue des logarithmes des rendements comme approximation de la volatilité

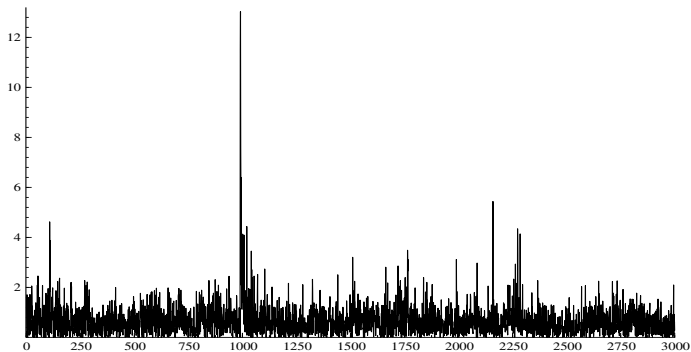


Figure: Valeur absolue des log des rendements sur l'indice FTSE 100  $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$  (1986–2002)

# Exemple empirique : la volatilité est-elle un processus persistant ?

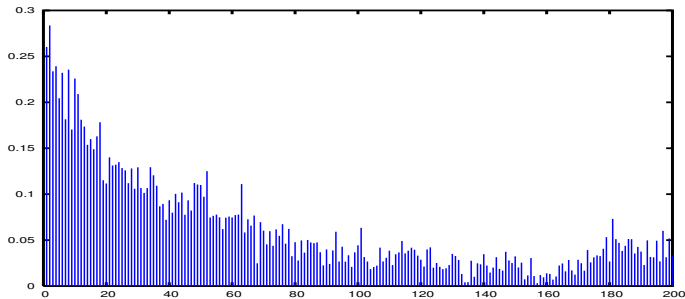


Figure: ACF de la valeur absolue des rendements  $|r_t|$  sur l'indice FTSE 100 (1986–2002)

## Exemple empirique : le processus de volatilité reconsidéré

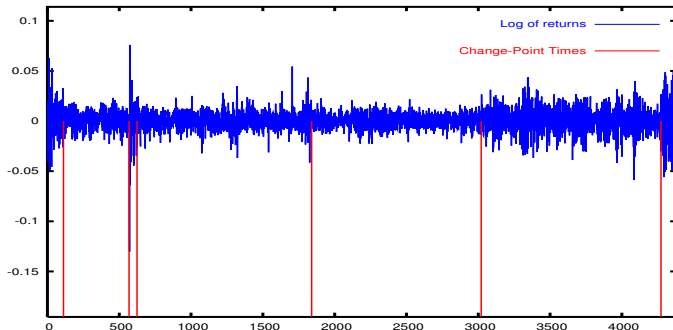


Figure: Log des rendements sur l'indice FTSE 100  $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$  (1986–2002)

Nous divisons l'échantillon en sous-intervalles de même variance.

# Exemple empirique : persistance ou artefact statistique ?

Sur chaque sous-intervalle de même variance, l'ACF n'a pas la même forme, bien que de la forte dépendance soit présente:

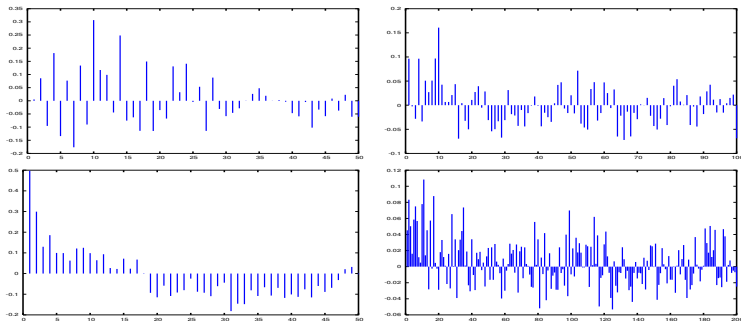


Figure: ACF de la valeur absolue  $|r_t|$  sur les intervalles :  
 a: Haut, gauche: [1, 112] ; b: Haut, droite: [113, 568]  
 c: Bas, gauche: [569, 624] ; d: Bas, droite: [625, 1840]

# Exemple empirique : persistance de la volatilité et de la co-volatilité ?

Ce phénomène peut être observé sur plusieurs séries temporelles.

Considérons deux séries d'indices observées sur la même échelle des temps:

- L'indice Footsie 100 entre 1986 et 2003, noté par  $r_{1,t}$ ,
- L'indice S&P 500, sur la même période, noté par  $r_{2,t}$ ,



# Exemple empirique : persistance de la volatilité et de la co-volatilité ?

Ce phénomène peut être observé sur plusieurs séries temporelles.

Considérons deux séries d'indices observées sur la même échelle des temps:

- L'indice Footsie 100 entre 1986 et 2003, noté par  $r_{1,t}$ ,
- L'indice S&P 500, sur la même période, noté par  $r_{2,t}$ ,

Nous considérons les approximations des processus de volatilité et de “co-volatilité”:

- Le processus de volatilité :  $|r_{1,t}|$  and  $|r_{2,t}|$ ,

# Exemple empirique : persistance de la volatilité et de la co-volatilité ?

Ce phénomène peut être observé sur plusieurs séries temporelles.

Considérons deux séries d'indices observées sur la même échelle des temps:

- L'indice Footsie 100 entre 1986 et 2003, noté par  $r_{1,t}$ ,
- L'indice S&P 500, sur la même période, noté par  $r_{2,t}$ ,

Nous considérons les approximations des processus de volatilité et de "co-volatilité":

- Le processus de volatilité :  $|r_{1,t}|$  and  $|r_{2,t}|$ ,
- Le processus de co-volatilité :  $\sqrt{|r_{1,t}r_{2,t}|}$ ,

# Exemple empirique : persistance de la volatilité et de la co-volatilité ?

Ce phénomène peut être observé sur plusieurs séries temporelles.

Considérons deux séries d'indices observées sur la même échelle des temps:

- L'indice Footsie 100 entre 1986 et 2003, noté par  $r_{1,t}$ ,
- L'indice S&P 500, sur la même période, noté par  $r_{2,t}$ ,

Nous considérons les approximations des processus de volatilité et de “co-volatilité”:

- Le processus de volatilité :  $|r_{1,t}|$  and  $|r_{2,t}|$ ,
- Le processus de co-volatilité :  $\sqrt{|r_{1,t}r_{2,t}|}$ ,

et nous nous intéressons à la fonction d'autocovariance sur les séries complètes et sur des sous-échantillons :

# Persistence de la volatilité et de la co-volatilité ? I

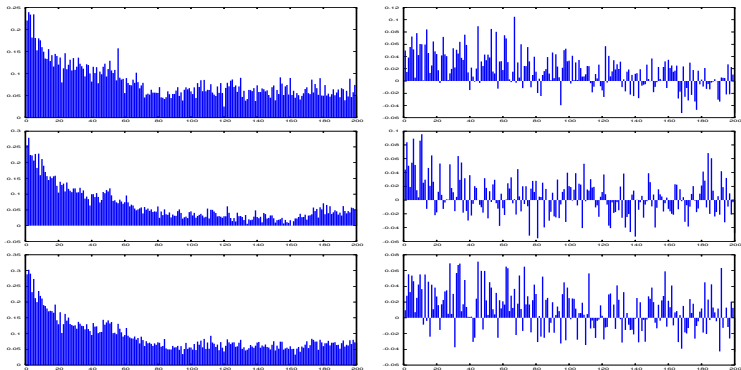


Figure: Colonne de gauche : De haut en bas les autocorrélations des rendements en valeur absolue sur le S&P 500 ( $|r_S|$ ), le FTSE 100 ( $|r_F|$ ), et la série de leur co-volatilité  $\sqrt{|r_S r_F|}$  sur l'échantillon complet.

Colonne de droite : La fonction d'autocorrélation empirique de ces trois séries sur l'intervalle [508 : 1715]

## Persistence de la volatilité et de la co-volatilité ? II

- Les séries de volatilité et co-volatilités semblent avoir la même structure de dépendance,  $\hat{\gamma}(k) \sim c_{\gamma}|k|^{-(1-2d)}$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $d \in (0, 1/2)$ ,  $c_{\gamma} > 0$ ,
- Les séries de volatilité et co-volatilité semblent avoir le même degré de persistance :

Estimation du degré de dépendance forte  $d$  des séries de rendements absolus sur le US Dollar-Deutschmark  $|R_{DEM,t}|$ , US Dollar-Yen  $|R_{YEN,t}|$ , US Dollar-Franc Suisse  $|R_{CHF,t}|$ , et US Dollar-Livre Sterling  $|R_{GBP,t}|$  (1996).  
Estimateur semiparamétrique local de Whittle (présenté plus tard)

$m$	$ R_{DEM,t} $	$ R_{YEN,t} $	$ R_{CHF,t} $	$ R_{GBP,t} $
$[T/4]$	0.1738	0.1776	0.1961	0.1810
$[T/8]$	0.2076	0.2252	0.2341	0.2138
$[T/16]$	0.2566	0.2450	0.2597	0.2550

## Persistance de la volatilité et de la co-volatilité ? III

Estimation semiparamétrique du degré de dépendance forte  $d$  des séries de rendements absolus sur les taux de change journaliers (avril 1979 - janvier 1997) Livre Sterling-Dollar  $|r_{1,t}|$ , Deutschmark-Dollar  $|r_{2,t}|$ , les carrés des rendements  $r_{1,t}^2$ ,  $r_{2,t}^2$ , et les co-volatilités  $\sqrt{|r_{1,t}r_{2,t}|}$  et  $r_{1,t}r_{2,t}$ . (E.T. asympt. entre parenthèses).

$m$	$ r_{1,t} $	$ r_{2,t} $	$\sqrt{ r_{1,t}r_{2,t} }$
$T/4$	0.2385 (0.0147)	0.2312 (0.0147)	0.2413 (0.0147)
$T/8$	0.3071 (0.0207)	0.3219 (0.0207)	0.3230 (0.0207)
$T/16$	0.4113 (0.0293)	0.4073 (0.0293)	0.4393 (0.0293)
$m$	$r_{1,t}^2$	$r_{2,t}^2$	$r_{1,t}r_{2,t}$
$T/4$	0.1569 (0.0147)	0.1478 (0.0147)	0.1397 (0.0147)
$T/8$	0.2312 (0.0207)	0.2119 (0.0207)	0.2073 (0.0207)
$T/16$	0.2770 (0.0293)	0.2787 (0.0293)	0.2952 (0.0293)

Ceci semble justifier une analyse multivariée des propriétés de dépendance forte des séries de volatilité et de co-volatilité

## Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.

# Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.
- En revanche, lorsque ces séries sont étudiées sur des sous-intervalles, les propriétés de dépendance forte sont moins aisément mises en évidence.



## Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.
- En revanche, lorsque ces séries sont étudiées sur des sous-intervalles, les propriétés de dépendance forte sont moins aisément mises en évidence.
- Dans ce cas particulier, la propriété de dépendance forte était déduite du comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation empirique

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\hat{\gamma}_Y(k)}{\hat{\gamma}_Y(0)}, \quad \hat{\gamma}_Y(k) = T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}), \quad \hat{\gamma}_Y(0) = \text{Var}(Y).$$

## Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.
- En revanche, lorsque ces séries sont étudiées sur des sous-intervalles, les propriétés de dépendance forte sont moins aisément mises en évidence.
- Dans ce cas particulier, la propriété de dépendance forte était déduite du comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation empirique

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\hat{\gamma}_Y(k)}{\hat{\gamma}_Y(0)}, \quad \hat{\gamma}_Y(k) = T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}), \quad \hat{\gamma}_Y(0) = \text{Var}(Y).$$

- On peut alors se poser la question de l'adéquation des méthodes statistiques simples (voire naïves) utilisées,

## Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.
- En revanche, lorsque ces séries sont étudiées sur des sous-intervalles, les propriétés de dépendance forte sont moins aisément mises en évidence.
- Dans ce cas particulier, la propriété de dépendance forte était déduite du comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation empirique

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\hat{\gamma}_Y(k)}{\hat{\gamma}_Y(0)}, \quad \hat{\gamma}_Y(k) = T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}), \quad \hat{\gamma}_Y(0) = \text{Var}(Y).$$

- On peut alors se poser la question de l'adéquation des méthodes statistiques simples (voire naïves) utilisées,
- D'abord, la fonction d'autocorrélation est peu informative si le processus n'est pas Gaussien (Samorodnitsky, 2002) ce qui est le cas des données financières.

# Conclusions temporaires de ces exemples I

- Les séries, étudiées dans leur ensemble, présentent certaines caractéristiques des processus fortement dépendants.
- En revanche, lorsque ces séries sont étudiées sur des sous-intervalles, les propriétés de dépendance forte sont moins aisément mises en évidence.
- Dans ce cas particulier, la propriété de dépendance forte était déduite du comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation empirique

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\hat{\gamma}_Y(k)}{\hat{\gamma}_Y(0)}, \quad \hat{\gamma}_Y(k) = T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}), \quad \hat{\gamma}_Y(0) = \text{Var}(Y).$$

- On peut alors se poser la question de l'adéquation des méthodes statistiques simples (voire naïves) utilisées,
- D'abord, la fonction d'autocorrélation est peu informative si le processus n'est pas Gaussien (Samorodnitsky, 2002) ce qui est le cas des données financières.
- Ensuite, si le processus n'est pas faiblement stationnaire (stationnarité du second ordre), les conclusions tirées du comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation empirique sont fausses.

## Conclusions temporaires de ces exemples II

Ces conclusions temporaires motivent l'organisation de ce cours, articulé en 5 parties:

- 1 Processus fortement dépendants,
- 2 Tests et estimateurs robustes aux trends et non linéarités,
- 3 Méthodes traditionnelles de détection de ruptures,
- 4 Les méthodes statistiques locales,
- 5 L'analyse multivariée.

# Caractérisation d'un processus aléatoire

## Définition

*Un processus aléatoire  $\{Y_t\}$  est Gaussien si sa distribution jointe est Normale multivariée.*

Une distribution jointe multivariée  $N_n(\mu, \Sigma)$  est complètement définie par le vecteur des moyennes  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  et sa matrice de covariance  $\Sigma = (\gamma(i, j))_{i, j=1, \dots, n}$ , et a une densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

## Remarque

*En pratique, les modèles statistiques utilisés sont définis par leur moyenne, variance et covariance.*

# Processus stationnaire du second ordre I

## Définition

Un processus aléatoire  $Y_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , est dit faiblement stationnaire si

$$\begin{aligned} EY_t &= \mu, \quad EY_t^2 < \infty \\ \gamma(t, s) &= \gamma(t + h, s + h), \quad \text{pour tout } t, s, h \end{aligned}$$

où

$$\gamma(t, s) = \text{Cov}(Y_t, Y_s) = E((Y_t - \mu)(Y_s - \mu))$$

est la fonction d'autocovariance de  $\{Y_t\}$ .

- $\gamma(t, s) = \gamma(t - s, 0)$ ,
- $\gamma(k) = \gamma(k, 0) = \text{Cov}(Y_{t+k}, Y_t)$ , l'autocovariance à l'ordre  $k$

## Processus stationnaire du second ordre II

### Propriétés

- $\gamma(0) = E(Y_t - \mu)^2 = \text{Var}(Y_t) > 0$ ,
- $\gamma(k) \leq \gamma(0)$ ,
- $\gamma(k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ ,
- $\gamma(k)$  est définie non négative: pour tout  $k \geq 1$  et pour tout réels  $c_1, \dots, c_k$

$$\sum_{i,j=1}^k c_i \gamma(i-j) c_j \geq 0$$



# Densité spectrale

## Définition

La densité spectrale  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\pi, \pi)$  est définie par

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

# Densité spectrale

## Définition

La densité spectrale  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\pi, \pi)$  est définie par

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

## Propriétés

- $f(\lambda) \geq 0$ ,
- $f(\lambda) = f(-\lambda)$ ,
- $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda = E(Y_t - \mu)^2 = \text{Var}(Y_t)$ ,

# Moyenne, variance et covariance empiriques

Problème : estimer  $\mu$ ,  $\gamma(k)$  et  $f(\lambda)$  à partir des données observées d'une série stationnaire.

- Moyenne empirique  $\bar{Y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t$ ,
- Variance empirique  $\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T n(Y_t - \bar{Y})^2$ ,
- Autocovariance empirique :  $\hat{\gamma}(k) = T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})$
- Périodogramme

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T e^{it\lambda} Y_t \right|^2, \quad \lambda \in (-\pi, \pi),$$

Sous des hypothèses d'ergodicité faible:

$$\bar{Y} \implies \mu, \quad \hat{\gamma}(0) \implies \text{Var}(Y_0), \quad \hat{\gamma}(k) \implies \gamma(k),$$

# Le périodogramme

- Si la densité spectrale  $f(\lambda)$  est continue:

$$EI(\lambda) \implies f(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

- Il est évalué aux fréquences de Fourier  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$ ,  $j \in [-T/2, T/2]$
- Le périodogramme n'est pas un estimateur consistant de  $f(\lambda)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(I(\lambda)) = f(\lambda)^2$$

- Pour lisser les variations de  $I(\lambda)$ , on utilise un lisseur,
- A ne pas confondre avec un effileur ("taper") utilisé pour enlever les tendances

## Définition

$$\text{Périodogramme "effilé"} P(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=1}^T |h_t|^2} \left| \sum_{t=1}^T e^{it\lambda} h_t Y_t \right|^2$$

Exemple de "taper" : effileur cosinus  $h_t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi t/T))$  avec

$$\sum_{t=1}^T |h_t|^2 = 3T/8$$

# Caractérisation de second ordre d'un processus avec "mémoire courte".

- La fonction d'autocovariance décroît rapidement vers 0, le taux de décroissance est dit exponentiel,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$$

- La densité spectrale est bornée  $f(\lambda) < C < \infty$ ,  $\lambda \in (-\pi, \pi)$

## Exemple

*Processus AR(1)  $Y_t = a_1 Y_{t-1} + \varepsilon$ , qui admet une solution stationnaire si  $|a_1| < 1$ ,*

$$\gamma(k) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} a_1^k, \quad \sigma^2 = \text{Var}(\varepsilon)$$

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - a_1 e^{i\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2a_1 \cos \lambda + a_1^2)^{-1}$$

# Caractérisation de second ordre d'un processus fortement dépendant

## Définition

Soit  $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$  un processus stationnaire du second ordre. Ce processus est un processus à longue portée si son spectre  $f_Y(\lambda)$  est tel que dans un voisinage proche positif de la fréquence zéro,

$$f_Y(\lambda) \sim c_f \lambda^{-2d}, \quad \lambda \rightarrow 0_+, \quad c_f \in (0, \infty),$$

ou de façon équivalente, si sa fonction d'autocorrélation (ACF)  $\rho_Y(k)$  décroît de façon hyperbolique comme suit :

$$\rho_Y(k) \sim k^{2d-1}, \quad d \in (0, 1/2),$$

Par conséquent, l'ACF d'un processus à longue portée n'est pas sommable:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_Y(k) = \infty.$$

# Exemple : ACF d'un processus fractionnaire

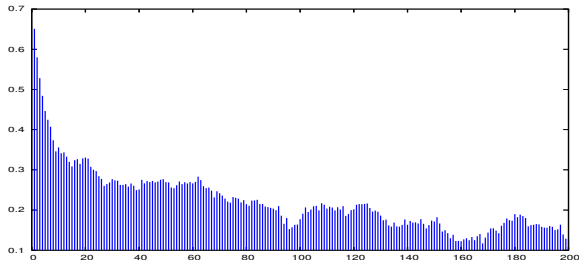


Figure: FARIMA(0,  $d$ , 0);  $d = 0.40$

dont le spectre est :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2 | \cos \lambda - 1 |)^{-2d}$$

# Exemple : périodogramme d'un processus fractionnaire

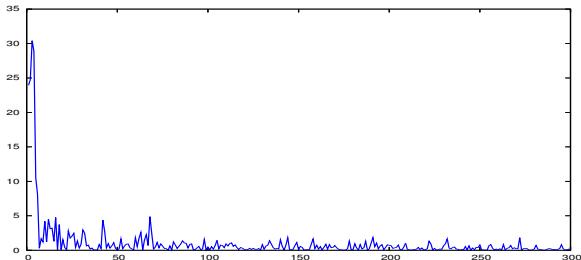


Figure: FARIMA(0,  $d$ , 0);  $d = 0.40$

dont le spectre est :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2 | \cos \lambda - 1 |)^{-2d}$$



# Caractérisation de second ordre d'un processus fortement dépendant à partir de $\text{Var}(\bar{Y})$

La propriété de dépendance forte du processus  $\{Y_t\}$  peut être caractérisée à partir de la décroissance de  $\text{Var}(\bar{Y})$

- Si  $\{Y_t\}$  est un processus à courte mémoire, c-a-d  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ , alors

$$\text{Var}(\bar{Y}) \sim T^{-1}s^2, \quad s^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) = 2\pi f(0)$$

# Caractérisation de second ordre d'un processus fortement dépendant à partir de $\text{Var}(\bar{Y})$

La propriété de dépendance forte du processus  $\{Y_t\}$  peut être caractérisée à partir de la décroissance de  $\text{Var}(\bar{Y})$

- Si  $\{Y_t\}$  est un processus à courte mémoire, c-a-d  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ , alors

$$\text{Var}(\bar{Y}) \sim T^{-1}s^2, \quad s^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) = 2\pi f(0)$$

- Si  $\{Y_t\}$  est un processus fortement dépendant, alors

$$\text{Var}(\bar{Y}) \sim T^{-(1-2d)}s^2, \quad s^2 = \frac{4c_\gamma}{(1-d)(2-d)}$$

# Processus Gaussiens et moyenne mobile I

Ces deux processus sont les plus utilisés pour définir des processus avec longue mémoire

- Le processus Gaussien stationnaire  $\{Y_t\}$  est défini uniquement par sa moyenne  $\mu$ , sa fonction d'autocovariance  $\gamma(k)$  (ou sa densité spectrale  $f(\lambda)$ )
- Pour toute fonction  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in (-\pi, \pi)$  et tout  $c_f > 0$ , et  $-0.5 < d < 0.5$  tel que  $f_Y(\lambda) \sim c_f \lambda^{-2d}$ ,  $\lambda \rightarrow 0_+$ , il existe un processus Gaussien stationnaire  $\{Y_t\}$  dont la densité spectrale est  $f_Y(\lambda)$
- Si  $0 < d < 0.5$ , le processus est fortement dépendant, si  $d = 0$ , le processus est à courte mémoire, et si  $-0.5 < d < 0$  le processus est antipersistant.

## Remarque

*Les processus antipersistants sont plus rarement observés, un exemple est celui des rendements boursiers observés à très haute fréquence, c-à-d toutes les 30 minutes.*

# Processus Gaussiens et moyenne mobile II

- Processus Moyenne mobile  $MA(\infty)$ :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \text{iid}(0, \sigma^2), \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty$$

- $EY_t = 0$ .
- La fonction d'autocovariance

$$\gamma(k) = EY_t Y_{t+k} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j b_{k+j}$$

## Processus Gaussiens et moyenne mobile III

- Si  $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty$ , le processus est à courte mémoire,
- Si les coefficients  $b_j$  décroissent de façon hyperbolique comme suit:

$$b_j \sim c_b j^{d-1}, \quad d \in (0, 1/2)$$

alors le processus est fortement dépendant en covariance puisque

$$\gamma(k) \sim c_\gamma t^{-1-2d-1}, \quad c_\gamma = \sigma^2 c_b^2 \int_0^\infty (1+x)^{d-1} x^{d-1} dx$$

# Processus $I(d)$

- Processus le plus simple défini par la solution stationnaire de l'équation:

## Définition

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

où l'opérateur de différence fractionnaire est défini comme suit

$$(1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k L^k, \quad \psi_0 = 1, \quad \psi_k = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1+d}{j}\right), \quad d \in (0, 1/2)$$

- Processus qui se généralise de façon triviale par le processus FARIMA( $p, d, q$ ) défini comme la solution stationnaire de

$$A(L)(1 - L)^d Y_t = B(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

où  $A(L)$  et  $B(L)$  sont des polynômes retard d'ordres respectifs  $p$  et  $q$ ,

$$LY_t = Y_{t-1}$$

# Propriétés du FARIMA( $p, d, q$ ) I

## Propriétés

- Généralise la classe de processus AR(I)MA,
- Caractérisé par  $p + q + 2$  paramètres,
- Une solution stationnaire existe pour  $d < 1/2$ ,
- La densité spectrale est

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_e^2 |B(\exp(-i\lambda))|^2}{2\pi |A(\exp(-i\lambda))|^2} |1 - \exp(-i\lambda)|^{-2d} \quad \lambda \in (-\pi, \pi),$$

# Propriétés du FARIMA( $p, d, q$ ) II

## Propriétés

- Représentation MA( $\infty$ )

$$Y_t = (1-L)^{-d} dA(L)^{-1} B(L) \varepsilon = \sum_{j>0} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

$$\psi_j \sim c_\psi j^{d-1}, \quad c_\psi = B(1)/A(1)\Gamma(d)$$

- Représentation AR( $\infty$ )

$$\varepsilon_t = B(L)^{-1} A(L) (1-L)^d Y_t = \sum_{j>0} \phi_j Y_{t-j},$$

$$\phi_j \sim c_\phi j^{-d-1}, \quad c_\phi = A(1)/B(1)\Gamma(-d)$$



## Paramétrisation qui peut être facilement enrichie

En remplaçant le filtre fractionnaire  $(1 - L)^d$  par  $(1 - 2 \cos(\omega)L + L^2)^d$ ,  $0 < \omega < \pi$ , on définit le processus GARMA( $p, d, q$ )

$$A(L)(1 - 2 \cos(\omega)L + L^2)^d Y_t = B(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d}(0, \sigma^2)$$

### Propriétés

- Ce processus a une singularité à la fréquence  $\omega$ ,  $f(\lambda) \sim c_f |\lambda - \omega|^{-2d}$ ,  $\lambda \rightarrow \omega \neq 0$ ,
- La fonction de covariance décroît hyperboliquement et sinusoidalement  $\gamma(k) \sim c_\gamma k^{2d-1} \cos(2\pi k\omega)$ ,
- Si  $\omega = 0$ , c'est un processus FARIMA( $p, 2d, q$ ), donc une solution stationnaire existe pour  $0 < d < 1/4$
- Si  $\omega > 0$ , une solution stationnaire existe pour  $0 < d < 1/2$

Les modèles avec une singularité  $> 0$  sont peu utilisés en finance, voir néanmoins les travaux d'Arteche (2004) sur l'indice IBEX.

# Limites des représentations FARIMA( $p, d, q$ )

- Si le processus de volatilité est fortement dépendant, la richesse de ces processus ne peut être représentée que par des processus FARIMA( $p, d, q$ ) avec des ordres de  $p$  et  $q$  assez élevés,
- Ce manque de parsimonie de ces modèles n'est pas trop compatible avec la représentation parsimonieuse de la dépendance forte par le seul paramètre  $d$ ,
- D'où la nécessité d'utiliser d'autres processus pour représenter les séries de volatilité,
- Ces processus feront l'objet de la section suivante.

# Processus de volatilité (variance conditionnelle)

Le processus le plus utilisé pour modéliser les rendements des actifs financiers est le processus GARCH( $p, q$ ) défini comme suit :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{t-j}^2$$

$$\varepsilon_t \text{ i.i.d.}, \quad E\varepsilon_t = 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_j \geq 0$$

Ces modèles représentent la variance conditionnelle à l'instant  $t$ ,  $\sigma_t^2$ .

## Processus de volatilité (variance conditionnelle)

Le processus le plus utilisé pour modéliser les rendements des actifs financiers est le processus GARCH( $p, q$ ) défini comme suit :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{t-j}^2$$

$$\varepsilon_t \text{ i.i.d.}, \quad E\varepsilon_t = 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_j \geq 0$$

Ces modèles représentent la variance conditionnelle à l'instant  $t$ ,  $\sigma_t^2$ .

### Remarque

*Autres modèles : EGARCH, TARARCH, et plus généralement Augmented GARCH, etc.*

## Processus de volatilité (variance conditionnelle)

- Les processus GARCH( $p, q$ ) ont une représentation ARCH( $\infty$ ) :

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1}\alpha_0 + (1 - \beta(L))^{-1}\alpha(L)r_t^2$$

$\alpha(L)$  et  $\beta(L)$  sont des polynômes retard d'ordre respectifs  $q$  et  $p$

- Les coefficients des polynômes décroissent de façon exponentielle.
- Nous avons :

$$\text{Cov}(r_t, r_s) = 0, \quad t \neq s, \quad \sum_k \text{Cov}(r_k^2, r_0^2) < \infty$$

### Question

*Comment modéliser la dépendance forte dans le cadre de modèles ARCH classiques ? (Giraitis, Kokoszka, Leipus, 2000).*

Cela est directement possible pour certains modèles : volatilité stochastique, modèles GARCH exponentiels (EGARCH), LARCH.

# Processus de volatilité (variance conditionnelle)

## Définition

Une suite de variables aléatoires  $r_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  vérifie les équations ARCH( $\infty$ ) si :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}^2$$

avec  $b_0 > 0$ ,  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$

# Processus de volatilité (variance conditionnelle)

## Définition

Une suite de variables aléatoires  $r_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  vérifie les équations ARCH( $\infty$ ) si :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}^2$$

avec  $b_0 > 0$ ,  $b_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$

## Propriétés

- Existence d'une solution stationnaire
- Structure de dépendance,
- Existence de solutions sans hypothèses sur les moments,
- Modèles LARCH( $\infty$ ) fortement dépendants.

# Expansion de Volterra (représentation chaotique)

- La variance conditionnelle

$$\sigma_t^2 = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}^2$$

admet le développement chaotique suivant :

$$\sigma_t^2 = b_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{\infty} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_l} \varepsilon_{t-i_1}^2 \varepsilon_{t-i_1-i_2}^2 \cdots \varepsilon_{t-i_1-\dots-i_l}^2$$

- Cette représentation est utilisée pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire



## Existence d'une solution

### Théorème

*Supposons que  $E\varepsilon_0^2 < \infty$ . Alors, les équations ARCH( $\infty$ ) admettent une solution unique (et non négative) stationnaire  $r_t^2$ ,  $E r_t^2 < \infty$ , si et seulement si :*

$$E\varepsilon_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i < 1$$

## Existence d'une solution

### Théorème

Supposons que  $E\varepsilon_0^2 < \infty$ . Alors, les équations ARCH( $\infty$ ) admettent une solution unique (et non négative) stationnaire  $r_t^2$ ,  $Er_t^2 < \infty$ , si et seulement si :

$$E\varepsilon_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i < 1$$

### Théorème

Supposons que  $E\varepsilon_0^4 < \infty$ . Alors, les équations ARCH( $\infty$ ) admettent une solution unique (et non négative) stationnaire  $r_t^2$ ,  $Er_t^4 < \infty$ , si

$$\sqrt{E\varepsilon_0^4} \sum_{j=1}^{\infty} b_j < 1$$

# Conditions nécessaires et suffisantes I

- Notons

$$\lambda_1 := E\varepsilon_0^2, \quad \lambda_2 := E\varepsilon_0^4, \quad \kappa^2 := \text{Var } \varepsilon_0^2 = \lambda_2 - \lambda_1^2$$

$$\zeta_j = (\varepsilon_j^2 - E\varepsilon_j^2)/\kappa$$

- Soient  $g_j$  les coefficients de la fonction génératrice

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j = \left( 1 - \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j \right)^{-1}$$

$$g_j = \sum_{k=1}^j \lambda_1^k \sum_{0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < j} b_{i_1} b_{i_2 - i_1} \dots b_{i_{k-2} - i_{k-1}} b_{j - i_{k-1}} \quad (j \geq 1)$$

## Conditions nécessaires et suffisantes II

- Soit  $h_j = (\kappa/\lambda_1)g_j$

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \quad H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} h_j^2$$

- Alors

$$r_t^2 = \mu + (\kappa/\lambda_1)\mu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_k < \dots < s_1 \leq t} g_{t-s_1} h_{s_1-s_2} \dots h_{s_{k-1}-s_k} \zeta_{s_1} \dots \zeta_{s_k}, \quad (A)$$

$$\text{où } \mu = Er_t^2 = \lambda_1 b_0 / (1 - \lambda_1 B)$$

## Conditions nécessaires et suffisantes III

### Théorème

*La série (A) converge en moyenne quadratique si et seulement si*

$$\lambda_1 B < 1, \quad H < 1.$$

- Alors (A) définit une solution stationnaire de l'équation définissant le processus ARCH( $\infty$ )

# Structure de dépendance

Par orthogonalité

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(r_t^2, r_0^2) &= (\kappa/\lambda_1)^2 \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_k < \dots < s_1 \leq 0} g_{-s_1} g_{t-s_1} h_{s_1-s_2}^2 \cdots h_{s_{k-1}-s_k}^2 \\
 &= (\kappa/\lambda_1)^2 \mu^2 \sum_{s \leq 0} g_s g_{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} H^{2(k-1)} \\
 &= \frac{(\kappa/\lambda_1)^2 \mu^2}{1-H^2} \sum_{s=0}^{\infty} g_s g_{s+t}
 \end{aligned}$$

Le processus ARCH( $\infty$ ) est toujours à courte mémoire :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(r_k^2, r_0^2) < \infty$$

# Modèle LM(q)-ARCH

Défini par :

$$r_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2, \quad \sigma_t^2 = \sigma^2(1 - \mu) + \mu(1 - (1 - L)^q)r_t^2, \quad (0 \leq \mu \leq 1, 0 < q < 1)$$

Ici  $b_j \sim cj^{-q-1}$

$$(1 - L)^q r_t^2 = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \underbrace{\sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)}_{\nu_t - \text{mart.dif.}}$$

$$(1 - L)^q (r_t^2 - Er_t^2) = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \nu_t \quad (B)$$

Ici  $Er_t^2 = \lambda_1 \sigma^2$

# Modèle LM(q)-ARCH

Défini par :

$$r_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2, \quad \sigma_t^2 = \sigma^2(1 - \mu) + \mu(1 - (1 - L)^q)r_t^2, \quad (0 \leq \mu \leq 1, 0 < q < 1)$$

Ici  $b_j \sim cj^{-q-1}$

$$(1 - L)^q r_t^2 = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \underbrace{\sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)}_{\nu_t - \text{mart.dif.}}$$

$$(1 - L)^q (r_t^2 - Er_t^2) = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \nu_t \quad (B)$$

Ici  $Er_t^2 = \lambda_1 \sigma^2$

Si  $Er_t^4 < \infty$  ( $0 < \mu < 1$ ), alors Ding et Granger (1996) prétendent que l'équation (B) implique

$$\text{Cov}(r_k^2, r_0^2) \sim Ck^{2q-1}$$



# Modèle LM(q)-ARCH

Défini par :

$$r_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2, \quad \sigma_t^2 = \sigma^2(1 - \mu) + \mu(1 - (1 - L)^q)r_t^2, \quad (0 \leq \mu \leq 1, 0 < q < 1)$$

Ici  $b_j \sim cj^{-q-1}$

$$(1 - L)^q r_t^2 = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \underbrace{\sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)}_{\nu_t - \text{mart.dif.}}$$

$$(1 - L)^q (r_t^2 - Er_t^2) = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) (\sigma^2 - \sigma_t^2) + \nu_t \quad (B)$$

Ici  $Er_t^2 = \lambda_1 \sigma^2$

Si  $Er_t^4 < \infty$  ( $0 < \mu < 1$ ), alors Ding et Granger (1996) prétendent que l'équation (B) implique

$$\text{Cov}(r_k^2, r_0^2) \sim Ck^{2q-1}$$

La réponse correcte est :

$$\text{Cov}(r_k^2, r_0^2) \sim Ck^{-q-1}$$

# Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments I

- Les conditions  $L^1$  et  $L^2$  ne sont pas nécessaires pour l'existence d'un processus ARCH( $\infty$ ) strictement stationnaire.
- Solution strictement stationnaire existe pour le processus GARCH(1,1) si et seulement si

$$E \log(\alpha_1 \varepsilon_k^2 + \beta_1) < 0$$

- On utilise la représentation :

$$\sigma_k^2 = b_0 \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{j=1}^l \underbrace{(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_j^2)}_{\eta_j} \right)$$

et la loi forte des grands nombres pour  $S_n = \log \eta_{k-1} + \dots + \log \eta_{k-n}$

- Ceci est difficile à appliquer à des GARCH( $p, q$ ) et ARCH( $\infty$ )

## Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments II

On réécrit le GARCH( $p, q$ )

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{k-j}^2$$

comme

$$Y_{n+1} = A_{n+1} Y_n + B,$$

avec

$$B = (\alpha_0, 0, \dots, 0)'_{p+q-1}, \quad Y_n = (\sigma_{n+1}^2, \dots, \sigma_{n-p+2}^2, r_n^2, \dots, r_{n-q+2}^2)'$$

# Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments III

et

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_k^2 + \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{p-1} & \beta_p & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{q-1} & \alpha_q \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon_k^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'exposant maximal de Lyapunov :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\|$$

## Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments IV

- L'exposant maximal de Lyapunov :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\|$$

- Supposons  $E\varepsilon_0^2 = 1$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  pour tout  $i$ .
- Alors, le processus GARCH( $p, q$ ) existe si et seulement si  $\gamma < 0$

# Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments : le cas ARCH( $\infty$ ) I

Réécrivons :

$$\sigma_t^2 = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r_{t-j}^2, \quad r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

comme

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= b_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{\infty} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_l} \varepsilon_{t-i_1}^2 \varepsilon_{t-i_1-i_2}^2 \cdots \varepsilon_{t-i_1-\dots-i_l}^2 \\ &= b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{tn}, \end{aligned}$$

avec

$$\eta_{tn} = \sum_{l=1}^n \sum_{i_1 + \dots + i_l = n} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_l} \varepsilon_{t-i_1}^2 \varepsilon_{t-i_1-i_2}^2 \cdots \varepsilon_{t-i_1-\dots-i_l}^2$$

# Existence d'une solution sans hypothèse sur les moments : le cas ARCH( $\infty$ ) II

Soit

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \eta_{0n},$$

## Théorème

*Si  $\gamma < 0$ , alors il existe une solution stationnaire aux équations définissant un processus ARCH( $\infty$ ). Si  $\gamma > 0$ , alors il n'y a pas de solution.*

# Le processus LARCH( $\infty$ )

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r_{t-j}, \quad \varepsilon_t \text{ i.i.d.} \quad E\varepsilon_t = 0, \quad \text{Var} \varepsilon_t = 1$$

Une solution stationnaire du second ordre  $r_t$  existe si et ssi  $\left( \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 \right)^{1/2} < 1$

En particulier, si on considère les coefficients du FARIMA(0,  $d$ , 0):

$$\beta_j \sim c j^{d-1}, \quad 0 < d < 1/2, \quad c > 0$$

Si  $L(E\varepsilon_0^4)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 < 1$ , alors  $r_t^2$  est faiblement stationnaire et










①  $\text{Cov}(r_k^2, r_0^2) \sim C k^{2d-1}$

②  $\frac{1}{n^{1/2+d}} \sum_{j=1}^{[n\tau]} (r_j^2 - E r_j^2) \rightarrow_{D[0,1]} c_d W_{1/2+d}(\tau)$

③ Effet de levier :  $\text{Cov}(\sigma_k^2, r_{k-j}) \sim C k^{d-1}$



# Références I

-  Arteche, J. (2004). Gaussian semiparametric estimation in long memory in stochastic volatility and signal plus noise models. *Journal of Econometrics*, **119**, 131–154
-  Avram, F., Taquq, M.S. (2000). Robustness of the R/S statistic for fractional stable noises. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **3**, 69–83.
-  Brillinger, D. (1981). *Time Series. Data Analysis and Theory*. Holden-Day.
-  Beran, J. (1994). *Statistics for Long Memory Processes*. Chapman & Hall.
-  Bulinski, A., Shashkin, A. (2007). *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems*. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, Vol. 10, World Scientific Publishing.
-  Csörgö, M., Horváth, L. (1997). *Limit Theorems in Change-Point Analysis*. Wiley.
-  Giraitis, L., Kokoszka, P.S., Leipus, R. (2000). Stationary ARCH models: dependence structure and Central Limit Theorem. *Econometric Theory*, **16**, 3–22.
-  Giraitis, L., Leipus, R., Surgailis, D. (2007). Recent advances in ARCH modelling, dans *Long Memory in Economics*, G. Teyssière et al. éditeurs, pp. 3–38, Springer Verlag.
-  Giraitis, L., Koul, H., Surgailis, D. (2010). *Large Sample Inference for Long-Memory Processes*, World Scientific Publishing, à paraître.

## Références II



Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R., Teyssière, G. (2000). Semiparametric estimation of the intensity of long-memory in conditional heteroskedasticity. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **3**, 113–128.



Lavielle, M., Teyssière, G. (2006). Detection of multiple change-points in multivariate time Series. *Lithuanian Mathematical Journal*, **46**, 287–306.



Mandelbrot, B.B. (1997). *Fractals and Scaling in Finance*. Springer Verlag.



Mandelbrot, B.B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, **36**, 394–419.



Samorodnitsky, G. (2002). Long Range Dependence. *Notes de cours*



Straumann, D. (2005). *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*. Lecture Notes in Statistics, Vol. **181**. Springer Verlag, Berlin.



Teyssière, G. (2003). Interaction models for common long-range dependence in asset price volatility, dans *Processes with Long Range Correlations: Theory and Applications*. Lecture Notes in Physics, Vol. **621**, G. Rangarajan et M. Ding éditeurs Springer Verlag, Berlin, 251–269.